הרצאה מספר 38
אלגברה 1 מ 104016
הנושא: מטריצה מייצגת של אל מטריצת מעבר בין בסיסים

דר. נתן ולך

הטכניון – הפקולטה למתמטיקה

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.13 מוטיבציה על שינוי בסים

- לכל מרחב נוצר סופית ממימד $n \geq 1$ יש אינסוף בסיסים. (בהנחה שהשדה שברקע אינסופית.)
- <u>שאלה 1:</u> מה הקשר בין וקטור הקואורדינטות של $\vec{v} \in V$ יחסית לבסיסים שונים?
- <u>שאלה 2:</u> מה הקשר בין מטריצה המייצגת של א"ל $T : V \to V$ יחסית לבסיסים שונים?
- נראה שניתן להגדיר מטריצת מעבר בין בסיסים שבעזרתה נקבל תשובות לשאלות.

- <u>שאלה 3:</u> האם אפשר לבחור בסיס "טוב" שבו למטריצה המייצגת תהיה מבנה "נוחה"?
- נחזור לדון בשאלה 3 בהמשך.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.14 הנחות וסימונים

- <u>הנחות וסימונים לנושא זה:</u>
  - יהא V מרחב וקטורי נוצר סופית ממימד n.
  - יהא $\mathbf{f} = \{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n\}$ בסיס של V.
  - יהא $\mathbf{g} = \{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n\}$ בסיס של V.
  - יהא $\mathbf{e} = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ בסיס הסטנדרטי של F^n.
  - יהא $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n$.
  - יהא $\vec{u} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{g}_j$. $\qquad [\vec{u}]_{\mathbf{g}} = \vec{\alpha}$
  - יהא $\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{f}_j$. $\qquad [\vec{v}]_{\mathbf{f}} = \vec{\alpha}$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{g}_j$$
$$\vec{v} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{f}_j$$

- **הגדרה (לצורך ההרצאה):** יהי $S_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}$ האו"ל המוגדר לפי $S_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}(\vec{g}_j) = \vec{f}_j$ לכל j.
- **אבחנה:** $S_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}(\vec{u}) = \vec{v}$ כי

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}(\vec{u}) &= S_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \vec{g}_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j S_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}(\vec{g}_j) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\vec{f}_j) = \vec{v} \end{aligned}$$

- **מסקנה (מטריצה מייצגת):** $[\vec{v}]_{\mathbf{g}} = [S_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}]_{\mathbf{g}}[\vec{u}]_{\mathbf{g}}$.
- **אבחנה:** $[\vec{v}]_{\mathbf{f}} = \vec{\alpha} = [\vec{u}]_{\mathbf{g}}$.
- **מסקנה (כמטריצת מעבר):** $[\vec{v}]_{\mathbf{g}} = [S_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}]_{\mathbf{g}}[\vec{v}]_{\mathbf{f}}$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.16 הגדרה: מטריצת מעבר $P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}$

- <u>הגדרה:</u> יהיו $\mathbf{f}=\{\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_n\}$ ו־ $\mathbf{g}=\{\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_n\}$ שני בסיסים של V. המטריצה $P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}=[S_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}]_{\mathbf{g}}$ נקראת

  מטריצת המעבר מבסיס $\mathbf{g}$ אל בסיס $\mathbf{f}$.

$$P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}\vdots & & \vdots\\ \left[\vec{f}_1\right]_{\mathbf{g}} & \cdots & \left[\vec{f}_n\right]_{\mathbf{g}}\\ \vdots & & \vdots\end{pmatrix} & \begin{matrix}g_1\\ \vdots\\ g_n\end{matrix}\end{array}$$

- <u>שימו לב:</u> $\left[\vec{f}_j\right]_{\mathbf{g}}=[S_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}(\vec{g}_j)]_{\mathbf{g}}$ מופיע בעמודה j.
- <u>המסקנה הקודמת:</u> $[\vec{v}]_{\mathbf{g}}=[S_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}]_{\mathbf{g}}[\vec{v}]_{\mathbf{f}}$.
- <u>המסקנה הקודמת במבט אחר:</u> $[\vec{v}]_{\mathbf{g}}=P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}[\vec{v}]_{\mathbf{f}}$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.16 הגדרה: מטריצת מעבר $P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}$

$$P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \left[\vec{f}_1\right]_{\mathbf{g}} & \cdots & \left[\vec{f}_n\right]_{\mathbf{g}} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} & \begin{array}{c} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{array} \end{array}$$

- <u>דוגמה:</u> $V = F^2$,

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- **נשים לב שהזוג מטריצות הן הפיכות זה לזה.**

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.17 המשפטים על מטריצת מעבר

- <u>משפט:</u> יהיו $\mathbf{f} = \{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n\}$ ו־ $\mathbf{g} = \{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n\}$ שני בסיסים של V. אזי:

1. $[\vec{v}]_{\mathbf{g}} = P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}[\vec{v}]_{\mathbf{f}}$.
2. $P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}$ הפיכה, ומתקיים: $(P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}})^{-1} = P_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}}$.
3. לכל א"ל $T : V \to V$ מתקיים:

$$[T]_{\mathbf{f}} = P_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}}[T]_{\mathbf{g}}P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}} = (P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}})^{-1}[T]_{\mathbf{g}}P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}$$

- את החלק הראשון כבר הוכחנו.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.18 הוכחה של 2

- <u>הוכחה ש</u> $(P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}})^{-1} = P_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}}$.
- לכל $\vec{w} \in V$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\left(P_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}}P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}\right)[w]_{\mathbf{f}} &= P_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}}\left(P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}[w]_{\mathbf{f}}\right)\\ &= P_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}}[w]_{\mathbf{g}}\\ &= [w]_{\mathbf{f}}\end{aligned}$$

- לכן לכל $\vec{v} \in F^n$ מתקיים $\left(P_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}}P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}\right)\vec{v} = \vec{v}$.
- בפרט $\left(P_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}}P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}\right)e_j = e_j$.
- אזי עמודה j של המכפילה $P_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}}P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}$ היא e_j.
- לכן $P_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}}P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}} = I_n$. $\square$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.19 הוכחה של 3

- <u>הוכחה של</u> $[T]_{\mathbf{f}} = P_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}}[T]_{\mathbf{g}}P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}} = (P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}})^{-1}[T]_{\mathbf{g}}P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}$
- לכל $\vec{w} \in V$ מתקיים:

$$\begin{aligned}
\left(P_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}}[T]_{\mathbf{g}}P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}\right)[\vec{w}]_{\mathbf{f}} &= \left(P_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}}[T]_{\mathbf{g}}\right)\left(P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}[\vec{w}]_{\mathbf{f}}\right) \\
&= \left(P_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}}[T]_{\mathbf{g}}\right)[\vec{w}]_{\mathbf{g}} \\
&= P_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}}\left([T]_{\mathbf{g}}[\vec{w}]_{\mathbf{g}}\right) \\
&= P_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}}\left[T(\vec{w})\right]_{\mathbf{g}} \\
&= \left[T(\vec{w})\right]_{\mathbf{f}}
\end{aligned}$$

- זה בדיוק התכונה שנדרשת ממטריצה המייצגת $[T]_{\mathbf{f}}$.
- $\left[\vec{f}_j\right]_{\mathbf{f}} = \vec{e}_j$
- בדיקה עבור $\vec{w} = \vec{f}_j$ מראה שעמודות j של $[T]_{\mathbf{f}}$ ושל $P_{\mathbf{f}\to\mathbf{g}}[T]_{\mathbf{g}}P_{\mathbf{g}\to\mathbf{f}}$ שוות. $\square$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.20 דוגמה $T(A) = A + A^t$

- <u>דוגמה:</u> $U = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, האופרטור $T : U \to U$ מוגדר על ידי $T(A) = A + A^t$.
- <u>בדיקה ש־ T א"ל:</u>

$$\begin{aligned} T(A+B) &= (A+B) + (A+B)^t = (A+B) + (A^t + B^t) \\ &= (A + A^t) + (B + B^t) = T(A) + T(B) \\ T(\alpha A) &= (\alpha A) + (\alpha A)^t = \alpha A + \alpha A^t \\ &= \alpha(A + A^t) = \alpha T(A) \end{aligned}$$

- <u>אבחנה:</u> התמונה תמיד מטריצה סימטרית.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.20 דוגמה $T(A) = A + A^t$

- <u>דוגמה:</u> $U = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, האופרטור $T : U \to U$ מוגדר על ידי $T(A) = A + A^t$.
- נבחור בסיס נוח:

$$\mathbf{e} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- $T(E_1) = E_1 + E_1^t = 2E_1$
- $T(E_2) = E_2 + E_2^t = E_2 + E_3$
- $T(E_3) = E_3 + E_3^t = E_3 + E_2$
- $T(E_4) = E_4 + E_4^t = 2E_4$
- לכן: $[T]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.20 דוגמה $T(A) = A + A^t$

- <u>דוגמה:</u> $U = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $T(A) = A + A^t$. $T(A)$ תמיד סימטרית.
- לכן נגדיר $V = \{ A \in U \ : \ A$ סימטרית$\}$ וט"ל $T : U \to V$.
- נשאר אם אותו בסיס של U:

$$\mathbf{e} = \left\{ E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ונבחור בסיס נוח ל־ V:

$$\mathbf{f} = \left\{ F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- $T(E_1) = E_1 + E_1^t = 2F_1$
- $T(E_2) = E_2 + E_2^t = F_2$
- $T(E_3) = E_3 + E_3^t = F_2$
- $T(E_4) = E_4 + E_4^t = 2F_3$

לכן סביר להגדיר את המטריצה:

$$[T]_{\mathbf{e}}^{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- כמטריצה מייצגת של T כט"ל מ־ U ל־ V יחסית לבסיס $\mathbf{e}$ של U ולבסיס $\mathbf{f}$ של V.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.21 הגדרה: מטריצה מייצגת כללי

- הגדרה: יהי $T: U \to V$ ט"ל כאשר U, V נוצרים סופית.
  - יהי $\mathbf{G} = \{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n\}$ בסיס סדור של U.
  - יהי $\mathbf{F} = \{\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m\}$ בסיס סדור של V.

דף זה לא בחומר למבחן.

  - נייצג את האיבר $T(\vec{g}_j)$ לפי הבסיס הסדור $\mathbf{F}$:

$$T(\vec{g}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i \text{ כלומר } [T(\vec{g}_j)]_{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

  - המטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left([T(\vec{g}_1)]_{\mathbf{F}} \cdots [T(\vec{g}_n)]_{\mathbf{F}}\right)$$

נקראת **המטריצה המייצגת** של T לפי הבסיסים (הסדורים) $\mathbf{G}$ (בסיס של U) ו־ $\mathbf{F}$ (בסיס של V).

הסימון: $[T]_{\mathbf{G}}^{\mathbf{F}}$

- בעמודה j של $[T]_{\mathbf{G}}^{\mathbf{F}}$ מופיע הוקטור $[T(\vec{g}_j)]_{\mathbf{F}}$.

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.22 דוגמה $T(A) = A + A^t$ המשך

- **דוגמה:** $U = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, האופרטור $T : U \to U$ מוגדר על ידי $T(A) = A + A^t$.
- נרחיב את הבסיס $\mathbf{f}$ של V לבסיס של U:

$$\mathbf{g} = \left\{ G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, G_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, G_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\boxed{\begin{aligned} G_1 &= E_1 \\ G_2 &= E_2 + E_3 \\ G_3 &= E_4 \\ G_4 &= E_2 - E_3 \end{aligned}}$$

- $T(G_1) = G_1 + G_1^t = 2G_1$
- $T(G_2) = G_2 + G_2^t = 2G_2$
- $T(G_3) = G_3 + G_3^t = 2G_3$
- $T(G_4) = G_4 + G_4^t = 0$
- לכן: $[T]_{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

תזכורת: $[T]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות

9.22 דוגמה $T(A) = A + A^t$ המשך

$$G_1 = E_1$$
$$G_2 = E_2 + E_3$$
$$G_3 = E_4$$
$$G_4 = E_2 - E_3$$

$$E_1 = G_1$$
$$E_2 = \frac{G_2 + G_4}{2}$$
$$E_3 = \frac{G_2 - G_4}{2}$$
$$E_4 = G_3$$

$$P_{\mathbf{e}\to\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_{\mathbf{g}\to\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{\mathbf{g}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{[T]_{\mathbf{g}} = P_{\mathbf{g}\to\mathbf{e}}[T]_{\mathbf{e}}P_{\mathbf{e}\to\mathbf{g}}}$$

$$\boxed{[T]_{\mathbf{e}} = P_{\mathbf{e}\to\mathbf{g}}[T]_{\mathbf{g}}P_{\mathbf{g}\to\mathbf{e}}}$$

©נתן ולך, כל הזכויות שמורות